Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 21 — 17. Januar 2023

Aufgabe 1: *(4 Punkte)* Beweise für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, und $r, s \in \mathbb{Q}$ die folgenden Aussagen nur unter Zuhilfenahme der Potenzgesetze für natürliche Exponenten und mit Hilfe der Monotonie und der Rechenregeln für natürliche Wurzeln.

(a) Aus $a < b$ folgt $a^r < b^r$, falls $r > 0$.

(b) Es gilt $a^r a^s = a^{r+s}$.

(c) Es gilt $a^r b^r = (ab)^r$.

(d) Es gilt $(a^r)^s = a^{rs}$.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)* Zeige, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ schneller wächst als jede Potenz von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Exponent $\alpha > 0$, d.h. zu jedem $\alpha > 0$ gibt es eine reelle Konstante $c \equiv c(\alpha) > 0$, so dass

$$\exp(x) > x^\alpha \qquad \text{für alle } x > c.$$

Zeige dann, dass der natürliche Logarithmus $\log : \exp(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ langsamer wächst als jede Potenz von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Exponent $\varepsilon > 0$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $d \equiv d(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\log(x) < x^\varepsilon \qquad \text{für alle } x > d.$$

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*

(a) Zeige die Ungleichung $\log(1 + x) \leq x$ für beliebige $x \geq 0$.

(b) Bestimme alle reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$, $x > e$, der Gleichung

$$\log(x - e) = 1 - 2\log(\sqrt{x + e}).$$

Ausgabedatum: 17. Januar 2023 **Abgabetermin:** 23. Januar 2023, 10:00 Uhr.